

## スプリント数学 No.14

不等式を"凸関数"で証明する ― AM-GM・コーシー・シュワルツを構造から理解する

## 導入文

AM-GM不等式やコーシー・シュワルツ不等式は「公式として使う」だけでは、難関大の不等式証明問題で応用が利かない。大学数学の「凸関数の性質から不等式が生まれる」という視点を持つと、有名不等式の構造が見え、証明の発想が根本から変わる。

## 講義概要

清光学院の講師陣は、これまでに皆さんと同じ志を持った先輩受験生たちの答案を何千枚も採点し、合否を判定してきました。その視点から設計されたこの授業では、凸関数の定義とJensenの不等式を高校生向けに翻訳し、AM-GM・コーシー・シュワルツ・相加相乗が「凸性から導かれる」という統一的な視点を体系化する。難関大の不等式証明問題に対して「何の凸性を使うか」という方針を立てられる力を養う。

**授業目標：**有名不等式を公式の暗記から、凸関数という構造的な視点から理解して使える状態へ変える。

**対象者：**高3・浪人生の理系志望者。微分・不等式の基本を既習で、難関国公立・医学部の不等式証明問題に見通しを持ちたい生徒。

**授業時間：**授業90分+演習・質疑応答30分

**到達目標：**凸関数の定義を説明できる/Jensenの不等式の意味を直感的に語れる/AM-GMとコーシー・シュワルツを構造から証明できる

## 授業構成 (90分) + 演習・質疑応答 (30分)

**授業90分：**1 導入：公式として使うだけでは対応できない問題を提示 2 概念導入：凸関数の定義を図で直感化 3 Jensenの不等式：凸関数の平均と平均の像の大小関係 4 AM-GM：算術・幾何平均をJensenから導出 5 コーシー・シュワルツ：ベクトルの内積と絶対値の関係として整理 6 演習：「何の凸性を使うか」を先に宣言して証明 7 まとめ：凸性で不等式を見る習慣を固定

**追加30分：**不等式証明問題3題を凸関数の視点から解く演習を行い、証明の方針の立て方について質疑応答を行う。

**板書・スライド骨子：**凸関数の定義と図/Jensenの不等式の直感/AM-GMとコーシー・シュワルツの導出/証明方針の選択基準

**課題：**不等式問題3題について、解前に「使う凸性とその理由」を書いてから証明する。

**備考：**高校・予備校の先生方/編入学試験および大学院受験への橋渡しの基礎確認をしたい方にも対応。