

スプリント数学 No.18

整数・合同式を"剰余の代数"で読む——mod計算を武器として使いこなす

導入文

整数問題で「余りで場合分けする」だけでは、難関大の整数問題で「ある自然数が3の倍数であることを示せ」「末尾の桁を求めよ」という問題に対して見通しが立ちにくい。大学数学の「合同式(modular arithmetic)」を武器として使うことで、整数問題のほとんどが一本の代数的な操作で処理できるようになる。

講義概要

清光学院の講師陣は、これまでに皆さんと同じ志を持った先輩受験生たちの答案を何千枚も採点し、合否を判定してきました。その視点から設計されたこの授業では、合同式($a \equiv b \pmod{n}$)を「同じ余りを持つ数の同値関係」として定義し、加法・乗法・べき乗の合同式の演算規則を体系化する。フェルマーの小定理の入口、末尾の桁・余りの問題、合同式による整除の証明まで整理し、難関大の整数問題を代数的に処理できる力を養う。

授業目標：整数の余り計算を場合分けの根性から、合同式という代数的武器として使える状態へ変える。

対象者：高2後半～高3・浪人生の理系志望者。整数・余りの基本を既習で、難関国公立・私立大の整数問題に合同式を使いたい生徒。

授業時間：授業90分+演習・質疑応答30分

到達目標：合同式の定義と演算規則を使いこなせる／末尾の桁・余りの問題を合同式で処理できる／整除証明に合同式を使う

授業構成 (90分) + 演習・質疑応答 (30分)

授業90分：1 導入：余りで場合分けするだけでは遅い問題を提示 2 合同式の定義： $a \equiv b \pmod{n}$ の意味を同値関係として定義 3 演算規則：加法・乗法・べき乗の合同式の法則 4 末尾の桁：10進数の末尾をmod 10として処理 5 余りの問題：大きいべき乗のmod計算 6 フェルマーの小定理の入口： $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ を概念的に紹介 7 演習：合同式で整数問題を代数的に処理する問題群

追加30分：合同式を使った整除証明と末尾の桁の計算演習を行い、フェルマーの小定理の応用について質疑応答を行う。

板書・スライド骨子：合同式の定義と同値関係／演算規則一覧／末尾の桁・余り問題の処理手順／フェルマーの小定理の入口

課題：整数問題3題について、合同式を使って解き、「なぜ合同式で処理できるのか」を各1文で説明する。

備考：高校・予備校の先生方／編入学試験および大学院受験への橋渡しの基礎確認をしたい方にも対応。