


スプリント数学 No.19

組み合わせを"二項係数"で制する —— パスカルの三角形から確率母関数へ

 導入

「何通り？」という問題で場合分けに迷っていませんか？二項係数 $C(n,r)$ を生成関数として使えば、組み合わせの問題が代数的に処理できます。

 講義概要

清光学院の講師陣は、これまでに皆さんと同じ志を持った先輩受験生たちの答案を何千枚も採点し、合否を判定してきました。その視点から設計されたこの授業では、 $C(n,r)$ の性質（対称性・パスカルの公式・Vandermonde の恒等式）を組み合わせ論的に理解し、生成関数（母関数）の入口まで扱います。確率母関数による期待値計算への橋渡しをします。

 授業目標（この授業が終わったらできること）

- 二項係数の基本性質を組み合わせ論的に証明できる
- Vandermonde の恒等式を使った和の計算ができる
- 生成関数の考え方をを使って数え上げ問題に応用できる

 授業構成

1. $C(n,r)$ の定義と基本性質
2. パスカルの三角形の構造と上・斜の和公式
3. Vandermonde の恒等式の証明
4. 広島大・熊本大の組み合わせ問題への応用

 課題

$\sum_{k=0}^n C(n,k)^2 = C(2n,n)$ を Vandermonde の恒等式を使って証明せよ。さらに $n=4$ で数値確認せよ。