AP SEIKO — スプリント数学 No.12

関数の凸・凹を"二階微分"で読む
—— 最大・最小と変曲点を一本化する

🎯 **今日のゴール：**
② 採点者が「理解している」と判断する答案の書き方を習得する
「$f''(x)>0$なら凸（下に凸)」という記憶から脱して、**凸関数の定義・ヘッセ行列・ヤンセンの不等式**まで一本化する。「二階微分 = 曲率の符号」という視点で、最適化問題・不等式の証明・テイラー展開の余剰項を統一的に扱えるようになる。

📌 この授業の問い

1. **$f''(x)>0$ は「何が」凸であることを意味するのか？定義から説明できるか？**
2. **凸関数の定義 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ から AM-GM 不等式を導けるか？**
3. **テイラー展開の余剰項（ラグランジュ型）は、凸関数の性質とどう繋がるか？**

※ 高校：「$f'(x)$の符号→増減表」 → 大学：「凸関数の定義・ヤンセン不等式・最適化の十分条件」

💡 凸関数の核心：「弦は曲線の上にある」

📐 **凸関数（下に凸）の定義**

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\ \leqq\ \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\quad (0\leqq\lambda\leqq 1)$$

「2点を結ぶ弦は、曲線より上（または同じ高さ）にある」——これが凸の定義

🔑 **$f''(x)>0$ と凸関数の関係** f が C^2 級のとき：f が凸 $\Leftrightarrow$ $f''(x)\geqq 0$（全ての x で）

証明の流れ：
$f''\geqq 0$ → f' は単調非減少
→ 接線は常に曲線の下（接線不等式：$f(y)\geqq f(x)+f'(x)(y-x)$）
→ 弦不等式（定義）が成立

変曲点：$f''(x)=0$ かつ f'' の符号が変わる点 → 凸から凹（または逆）へ切り替わる点

採点者の視点

採点者はここを見ている —— 凸関数・二階微分の問題で合格答案はこういう「構造」をしている

① なぜ同じ答えでも評価が違うのか

清光学院の講師陣は、これまでに皆さんと同じ志を持った先輩受験生たちの答案を何千枚も採点し、合格・不合格の判定を下してきました。その経験から言えることが一つあります。

「正しい答えを出していても、なぜそう考えたのかが見えない答案は、採点者の印象に残らない。」

凸関数・二階微分の問題では、*凸凹の判定根拠*の理解が答案の質を大きく左右します。

② 凸関数・二階微分の問題で採点者が見ているポイント

「f''(x)>0であるから下に凸」と根拠を示した答案が採点者に明快と映る

💡 **この授業の使い方**

各問題のワンポイントには「採点者がどこを評価するか」の視点が含まれています。答えを出すだけでなく、根拠を一文添える習慣を意識しながら取り組んでください。

③ 総合型選抜・口頭試問でも同じ構造が問われる

採点者（大学教員）が口頭試問で確認したいのは「答えが出るか」ではなく「思考の構造を説明できるか」です。この授業で習得する「上から俯瞰する」視点は、あらゆる試験形式に通用します。

📚 続きは講義でご覧いただけます

この教材には、採点者の視点・核心的な解法・入試問題・演習・まとめがさらに収録されています。
大学教授陣が設計した「普通の授業では出会えない接続点」を体験できる完全版は講義でご提供いたします。