AP SEIKO — スプリント数学 No.14

不等式を"凸関数"で証明する
—— AM-GM・コーシー・シュワルツを構造から理解する

🎯 **今日のゴール：**
② 採点者が「理解している」と判断する答案の書き方を習得する
入試頻出の不等式を「個別の証明技法」から「凸関数という統一構造」で再設計する。 **コーシー・シュワルツ不等式・ヤング不等式・相加相乗・パワーミーン不等式**を 凸関数・ヤンセン不等式・内積の視点から一本化し、「なぜ成立するか」を構造で理解する。

📌 この授業の問い

1. **コーシー・シュワルツ不等式 $(\Sigma a_ib_i)^2 \leqq (\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2)$ を「内積の幾何学」から証明できるか？**
2. **ヤング不等式 $ab \leqq a^p/p+b^q/q$ $(1/p+1/q=1)$ を凸関数（e^xの凸性）から導けるか？**
3. **パワーミーン不等式 $H \leqq G \leqq A \leqq Q$（調和・幾何・相加・二乗平均）を一本の構造で理解できるか？**

※ 高校：「各不等式を個別の技法で証明」 → 大学：「凸関数・内積・ヤンセン不等式で全て統一」

💡 不等式の統一構造：「凸性と内積」

📐 **主要不等式の関係図**

コーシー・シュワルツ → ヤング → AM-GM → パワーミーン

全て「凸関数の性質」または「内積の非負性」から導出可能——暗記不要

🔑 **コーシー・シュワルツの内積による証明** ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$、$\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_n)$ の内積：
$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \leqq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
$\to (\Sigma a_ib_i)^2 \leqq (\Sigma a_i^2)(\Sigma b_i^2)$ □

等号成立：$\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$（$a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$）

採点者の視点

採点者はここを見ている ―― 不等式・凸関数の問題で合格答案はこういう「構造」をしている

① なぜ同じ答えでも評価が違うのか

清光学院の講師陣は、これまでに皆さんと同じ志を持った先輩受験生たちの答案を何千枚も採点し、合格・不合格の判定を下してきました。その経験から言えることが一つあります。

「正しい答えを出していても、なぜそう考えたのかが見えない答案は、採点者の印象に残らない。」

不等式・凸関数の問題では、*AM-GM等の適用根拠*の理解が答案の質を大きく左右します。

② 不等式・凸関数の問題で採点者が見ているポイント

「凸関数のジェンセン不等式より」と根拠を明示した答案が採点者に「理解している」と映る

💡 **この授業の使い方**

各問題のワンポイントには「採点者がどこを評価するか」の視点が含まれています。答えを出すだけでなく、根拠を一文添える習慣を意識しながら取り組んでください。

③ 総合型選抜・口頭試問でも同じ構造が問われる

採点者（大学教員）が口頭試問で確認したいのは「答えが出るか」ではなく「思考の構造を説明できるか」です。この授業で習得する「上から俯瞰する」視点は、あらゆる試験形式に通用します。

📚 続きは講義でご覧いただけます

この教材には、採点者の視点・核心的な解法・入試問題・演習・まとめがさらに収録されています。
大学教授陣が設計した「普通の授業では出会えない接続点」を体験できる完全版は講義でご提供いたします。