AP SEIKO — スプリント数学 No.19

組み合わせを"二項係数"で制する
—— パスカルの三角形から確率母関数へ

🎯 **今日のゴール：**
② 採点者が「理解している」と判断する答案の書き方を習得する
二項係数 C(n,k) を「選ぶ」から「係数を読む」へ格上げする。 **パスカルの恒等式・ヴァンデルモンドの畳み込み・確率母関数（PGF）**まで一本化し、 「組み合わせの計算 = 多項式の係数を操作する」という設計者の視点を身につける。

📌 この授業の問い

1. **$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$（パスカルの恒等式）を代数的に証明できるか？**
2. **Σ_{k=0}^{n} $C(n,k)^2 = C(2n,n)$ をヴァンデルモンドの畳み込みで示せるか？**
3. **確率母関数 $G(x) = \Sigma\ P(X=k)x^k$ から期待値・分散を導出できるか？**

※ 高校：「C(n,k)=n!/(k!(n-k)!)」 → 大学：「生成関数の係数・母関数演算・組合せ論」

💡 二項係数の核心：「係数として読む」

📐 **二項定理（No.8の復習）**

$$(1+x)^n = \Sigma\text{\_}\{k=0\}\text{\^{}}\{n\}\ C(n,k)\ x^k$$

C(n,k) は「$(1+x)^n$ の x^k の係数」——組み合わせの数は多項式の係数として読める

🔑 **パスカルの恒等式と代数的証明** $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$

代数的証明：
右辺 $= (n-1)!/((k-1)!(n-k)!) + (n-1)!/(k!(n-k-1)!)$
$= (n-1)!\cdot k/(k!(n-k)!) + (n-1)!\cdot(n-k)/(k!(n-k)!)$
$= (n-1)!\cdot n/(k!(n-k)!) = \mathbf{n!/(k!(n-k)!) = C(n,k)}$ □

組合せ論的証明：n個からk個選ぶとき、特定の要素を「含む」か「含まない」かで場合分け

採点者の視点

採点者はここを見ている —— 二項係数・組み合わせの問題で合格答案はこういう「構造」をしている

① なぜ同じ答えでも評価が違うのか

清光学院の講師陣は、これまでに皆さんと同じ志を持った先輩受験生たちの答案を何千枚も採点し、合格・不合格の判定を下してきました。その経験から言えることが一つあります。

「正しい答えを出していても、なぜそう考えたのかが見えない答案は、採点者の印象に残らない。」

二項係数・組み合わせの問題では、*パスカルの三角形との接続*の理解が答案の質を大きく左右します。

② 二項係数・組み合わせの問題で採点者が見ているポイント

「C(n,k)+C(n,k-1)=C(n+1,k)の漸化式より」と構造を示す答案が高評価

💡 **この授業の使い方**

各問題のワンポイントには「採点者がどこを評価するか」の視点が含まれています。答えを出すだけでなく、根拠を一文添える習慣を意識しながら取り組んでください。

③ 総合型選抜・口頭試問でも同じ構造が問われる

採点者（大学教員）が口頭試問で確認したいのは「答えが出るか」ではなく「思考の構造を説明できるか」です。この授業で習得する「上から俯瞰する」視点は、あらゆる試験形式に通用します。

📚 続きは講義でご覧いただけます

この教材には、採点者の視点・核心的な解法・入試問題・演習・まとめがさらに収録されています。
大学教授陣が設計した「普通の授業では出会えない接続点」を体験できる完全版は講義でご提供いたします。